

ডাচ্-বাংলা ব্যাংক - প্রথম আলো জাতীয় গণিত উৎসব ২০০৭

৫ম বাংলাদেশ গণিত অলিম্পিয়াড

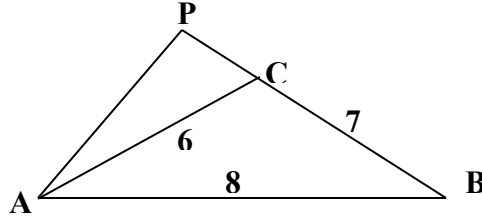
আয়োজনে : বাংলাদেশ গণিত অলিম্পিয়াড কমিটি

Category: Higher Secondary (১১শ ও ১২শ শ্রেণী)

পূর্ণমান : ১৭৫

সময় : ৪ঘন্টা

১.



চিত্রে $AB = 8, BC = 7, CA = 6$. ΔPAB

এবং ΔPCA সদৃশকোণী। PC এর মান কত?

In the figure $AB = 8, BC = 7$ and

$CA = 6$. ΔPAB is similar to

ΔPCA . What is PC ?

৫

২.

O কেন্দ্র বিশিষ্ট বৃত্তে ব্যাস WZ . $YO = 5$. বৃত্তচাপ XW কেন্দ্রে 60° কোণ উৎপন্ন করে। যদি $\angle ZYO = 60^\circ$ হয় তাহলে $XY = ?$

WZ is the diameter of circle with center O . $YO = 5$, arc XW creates angle 60° at the center. If $\angle ZYO = 60^\circ$, then $XY = ?$

৮

৩.

ΔABC এ $\angle PAC = \angle PBC$ । P বিন্দু থেকে BC এবং CA এর উপর লম্ব টানা হলে তারা রেখাদ্বয়কে যথাক্রমে L এবং M বিন্দুতে ছেদ করে। AB এর মধ্য বিন্দু D হলে,

$\frac{DL}{DM}$ এর মান বের কর।

In ΔABC , $\angle PAC = \angle PBC$. The perpendiculars from P to BC and CA meet these lines at L and M respectively. D is the midpoint of AB . What is the value of $\frac{DL}{DM}$?

১০

৪.

m ও n এর গ.সা.গু কে (m,n) দ্বারা প্রকাশ করা হল। যেমন $(2,3) = 1$ । $(10,15) = 5$ ।

ধরা যাক $n(n+1)(n+2)$ একটি বর্গ, যেখানে একটি n পূর্ণসংখ্যা।

a) $(n,n+1)$ এর মান কত?

b) $(n+1,n+2)$? এর মান কত?

c) $(n+1,n(n+2))$ এর মান কত?

a, b, c , এর প্রাপ্ত ফলাফল থেকে বল $n(n+1)(n+2)$ একটি বর্গ হওয়া সম্ভব কিনা।

We call the largest common divisor of integers and n by (m,n) . For example $(2,3) = 1$ and $(10,15) = 5$. Suppose $n(n+1)(n+2)$ is a square, where $n = \text{integer}$.

a) What is $(n,n+1)$?

b) What is $(n+1,n+2)$?

c) What is $(n+1,n(n+2))$?

From your answers a, b, c , is it possible for $n(n+1)(n+2)$ to be a square?

১৫

ডাচ্-বাংলা ব্যাংক - প্রথম আলো জাতীয় গণিত উৎসব ২০০৭

৫ম বাংলাদেশ গণিত অলিম্পিয়াড

আয়োজনে : বাংলাদেশ গণিত অলিম্পিয়াড কমিটি

৫. $x^2 - 6x + 1$ বহুপদীর মূলদ্বয় (zeros) কে x_1 এবং x_2 দ্বারা সূচিত করা হলে প্রমাণ কর যে, $x_1^n + x_2^n$ একটি পূর্ণ সংখ্যা এবং এটি 5 দ্বারা বিভাজ্য নয়। [এখানে n একটি অঋণাত্মক পূর্ণ সংখ্যা]
- If x_1, x_2 are the zeros of the polynomial $x^2 - 6x + 1$, then prove that for every nonnegative integer n , $x_1^n + x_2^n$ is an integer and not divisible by 5.
৬. 19থেকে 92 এর মধ্যকার সবকটি পূর্ণসংখ্যা পরপর লিখে আরেকটি বড় পূর্ণসংখ্যা $N=192021...909192$ গঠন করা হল। N যদি 3^k দ্বারা বিভাজ্য হয় তাহলে k এর সর্বোচ্চ মান কত?
- Writing down all the integers from to 92 we make a large integer N .
 $N=192021...909192$. If N is divisible by 3^k then what is the maximum value of k ?
৭. $f(x) = x^6 + x^5 + \dots + x + 1$ হয়, তবে $f(x^7)$ কে $f(x)$ দিয়ে ভাগ করলে ভাগশেষ কত হবে?
- $f(x) = x^6 + x^5 + \dots + x + 1$. Find the remainder when dividing $f(x^7)$ by $f(x)$.
৮. একটি বৃত্তের সমান্তরাল দুটি জ্যা এর দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 10 ও 14 একক। এদের মধ্যবর্তী দূরত্ব 6 একক। জ্যাদ্বয় হতে সমদূরত্বে এমন আরেকটি জ্যা রয়েছে যা উল্লিখিত জ্যাদ্বয়ের সমান্তরাল এবং যার দৈর্ঘ্য \sqrt{a} । a এর মান নির্ণয় কর।
- Two parallel chords of a circle have length 10 and 14. The distance between them is 6. The chord parallel to these chords and half way between them has length \sqrt{a} . Find a .
৯. একটি বর্গের বাহুর দৈর্ঘ্য 2 একক। ধরা যাক, S হল এমন একটি সেট যার উপাদান হল 2 একক দৈর্ঘ্য বিশিষ্ট এমন সব রেখাংশ যাদের প্রান্ত বিন্দুদ্বয় বর্গটির সন্নিহিত বাহুগুলোর উপর অবস্থিত। আরো ধরা যাক L হল এমন একটি সেট যা S সেটের অন্তর্ভুক্ত রেখাংশগুলোর মধ্যবিন্দু সমূহের সমন্বয়ে গঠিত। L দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।
- A square has sides of length 2. Let S is the set of all line segments that have length 2 and whose endpoints are on adjacent side of the square. Say L is the set of the midpoints of all segments in S . Find out the area enclosed by L .
১০. $y = |x - 1|$ এবং $x^2 + y^2 = 2x$ (যেখানে $y \geq 0$) রেখাগুলো দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।
- Find the area bounded by the curves $y = |x - 1|$ and $x^2 + y^2 = 2x$ (where $y \geq 0$).

ডাচ্-বাংলা ব্যাংক - প্রথম আলো জাতীয় গণিত উৎসব ২০০৭

৫ম বাংলাদেশ গণিত অলিম্পিয়াড

আয়োজনে : বাংলাদেশ গণিত অলিম্পিয়াড কমিটি

১১. নিচের অসমতাটি সমাধান কর। ১৫
- $$2 \cos x \leq \left| \sqrt{1 + \sin 2x} - \sqrt{1 - \sin 2x} \right|$$
- Solve the inequality
- $$2 \cos x \leq \left| \sqrt{1 + \sin 2x} - \sqrt{1 - \sin 2x} \right|$$
১২. $[0, \pi]$ ব্যবধিতে $\left(\frac{\sin 10x}{\sin x} \right)^2$ এর গুরুমান ও লঘুমান কয়টি? ১৫
- Find the minima and maxima of $\left(\frac{\sin 10x}{\sin x} \right)^2$ in the interval $[0, \pi]$.
১৩. সোহাগ ও পিয়াসের কতগুলো নারিকেল ছিল। মোট যতগুলো নারিকেল ছিল প্রত্যেকটি নারিকেল তারা ঠিক তত টাকা করে বিক্রি করল। এবার বিক্রিত অর্থ থেকে প্রথমে সোহাগ ২০ টাকা এবং তারপর পিয়াস ২০ টাকা - এভাবে পর্যায়ক্রমে নিতে থাকল। এভাবে কিছুক্ষণ পর সোহাগের যখন নেয়ার পালা এল তখন পর্যাপ্ত টাকা ছিল না। সোহাগ তখন অবশিষ্ট টাকাগুলো নিয়ে পিয়াসকে তার নিজের কলমটি দিয়ে দিল যাতে বন্টন সুসম হয়। কিন্তু তারা যদি ২৫ টাকা করে নিত তাহলেও একই রকম অবস্থা তৈরী হত, তবে সেক্ষেত্রে সোহাগকে তার পেন্সিলটি দিয়ে দিতে হত। পেন্সিলের দাম কলমের দামের চেয়ে ৫ টাকা কম হলে, কলমের দাম কত ছিল? [কলম ও পেন্সিল উভয়ের দাম পূর্ণ সংখ্যা] ১০
- Sohag and Pias had some coconuts. They sold each coconut at the price which is equal to the number of the total coconuts. Sohag and Pias began to take 20 Taka each alternately from the obtained money. Sohag started the process. After a while he found that there was not enough money to take like before. Then he took the remaining money and to make the sharing fair he gave his pen to Pias. If they took 25 Taka each alternately the situation would be almost same but in that case Sohag Had to give his pencil to Pias. If the pen costs 5 Taka more than the pencil. What is the price of the pencil? [The costs of pen and pencil are integers]
১৫. যদি $m + 12 = p^a$ এবং $m - 12 = p^b$ হয়, যেখানে a, b, m হল পূর্ণসংখ্যা এবং p হল মৌলিক সংখ্যা। $p > 0$ এর সকল মান নির্ণয় কর। [p এর মাত্র তিনটি মান আছে।] ১৩
- If $m + 12 = p^a$ and $m - 12 = p^b$ where a, b, m are integers and p is a prime number. Find all possible primes $p > 0$. [Note: P only takes three values]